

SERIE E SVILUPPI IN SERIE.

di
S. Incarbone

Avvertenza. Gli appunti che seguono hanno uno scopo semplicemente introduttivo e d'impostazione per studenti universitari di analisi matematica: non sono pertanto concepiti come una vera e propria trattazione rigorosa ma piuttosto come illustrazione preparatoria alla comprensione di una materia di solito considerata di difficile apprendimento.

Introduzione filosofica.

Si sa che la realtà è in continua trasformazione. Nel tentativo di porre un ordine possibilmente comprensibile, quindi prevedibile, nell'evolversi delle cose, si è sempre fatto ricorso all'idea di grandezza nel senso di qualcosa di valutabile, se non addirittura di misurabile.

L'idea di un "quanto grande" è da sempre stata applicata al tempo – sia come durata estesa e sia come "data" tendenzialmente puntiforme per così dire, vale a dire come istante – e così pure allo spazio sia come punto e sia come estensione, distanza, area o volume. Il punto di vista quantitativo è sempre stato applicato a tutti gli aspetti valutabili o misurabili della realtà: velocità, peso, numero di oggetti (cose, animali, persone), angoli, denaro, merci...

Più recentemente, nella storia dell'umanità, sono stati riconosciuti misurabili alcuni nuovi aspetti della realtà, prima sfuggiti all'osservazione, legati all'elettricità e al magnetismo: la fisica ha infatti riconosciuto necessaria la definizione di carica elettrica che è assunta così a quarta grandezza fondamentale accanto alle prime tre di spazio, tempo e massa. Da queste grandezze fondamentali la fisica è riuscita – mediante la scoperta di leggi quantitative opportune – a definire una moltitudine di altre grandezze, dette "derivate" dalle prime quattro "fondamentali". Esse sono derivate mediante operazioni aritmetiche precise di moltiplicazione o rapporto, p. es. la velocità come rapporto fra spazio e tempo, con relazione dimensionale $[v] = [s/t]$ o con operazioni di potenza come l'area (l^2) e il volume (l^3).

Non c'è dubbio che il numero sia un mezzo formidabile ed essenziale per porre un ordine nella realtà, altrimenti caotica e incomprensibile a causa dei suoi continui cambiamenti; è proprio a causa di questi cambiamenti che il conteggio (di elementi discreti) e la misura (di grandezze continue) offrono risultati a loro volta cangianti ovvero variabili: consideriamo per esempio, il peso di un bambino che sta crescendo; si tratta di una quantità importante che viene misurata con una bilancia e a cadenza fissa, per es. giorno per giorno o magari mese per mese. Naturalmente ci si domanderà se il peso va crescendo bene o male rispetto al peso previsto o codificato in opportune tabelle: ma a questo punto sorge il problema di determinare quale possa essere il risultato o magari la previsione più giusta a cui riferirsi avendo come dati di partenza il peso attuale e quelli precedenti già osservati prima, oppure con riferimento a un certo numero di valori medi ottenuti su un campione di bambini ritenuto soddisfacente.

Altre volte accade di osservare variazioni che non sappiamo bene come esattamente calcolare ancorché appaiano chiaramente quantificate dalla loro stessa definizione o natura con cui furono riconosciute e definite, eventualità che si verifica persino in ambito geometrico come nel caso delle funzioni trigonometriche.

Se ne conosce infatti la genesi grazie alla costruzione grafica ma non si è in grado di trovare un calcolo direttamente dai dati che osserviamo. P. es. quanto vale $\sin 33^\circ$?

Occorre allora escogitare dei mezzi di calcolo che aggirino la difficoltà del problema. Si sa infatti che la funzione $y = \sin x$ che sembrerebbe così ben definita geometricamente, non è tuttavia calcolabile mediante operazioni aritmetiche – e per questo motivo è detta funzione "trascendente". Si ricorre così a delle "tavole" - tabelle – faticosamente calcolate nella storia della matematica. Lo stesso accade per esempio, di solito e tranne casi particolari, per le radici e i logaritmi. In tutti questi casi si può pensare di ricavare il valore cercato mediante una somma di funzioni più facili da calcolare. Ha dunque senso cercare un polinomio adatto che si presenti come somma di potenze pesate con opportuni coefficienti (serie di Taylor); analogamente se la funzione che si vuole descrivere fosse periodica, si può ricorrere a una somma opportuna, pesata con parametri adatti e formata da funzioni trigonometriche che sono periodiche (serie di Fourier).

Nota storica.

A questo proposito, un grande aiuto ci viene dato dalla rappresentazione cartesiana che utilizza due assi fra loro perpendicolari. Nel caso della crescita, possono rappresentare uno il tempo e l'altro il peso. L'invenzione della geometria cartesiana ha in effetti accelerato il progresso della civiltà nei secoli più recenti, vicini a noi, giacché ha reso più comprensibile, prevedibile e più semplice studiare l'evolversi dei fenomeni sia naturali che artificiali.

Fra questi ultimi fenomeni "artificiali" perché prodotti ad arte - è bene ricordare:

- l'invenzione dei motori (a vapore, a scoppio, idraulici, elettrici...). I motori hanno sostituito la forza delle braccia, delle gambe e degli animali alleviando la fatica e il lavoro fisico;
- l'invenzione dei segnalatori o indicatori che possiamo definire come "apparati in grado di usare un segnale o simbolo per produrre un effetto significativo ovvero un significato" (radio, relè, tasti elettrici)

ossia apparsi in grado di produrre un legame simbolo-significato - legame realizzato anche nelle macchine dette “computer”: queste ultime hanno permesso di alleviare pure il lavoro mentale.

L’uso dei segnalatori si è espanso, facilitato dall’invenzione dell’algebra di Boole; con questa matematica particolare, Boole intendeva individuare, riprodurre e sfruttare le “leggi del pensiero”.

L’algebra booleana e gli studi della geniale Ada Lovelace sono stati largamente applicati nella progettazione dei calcolatori.

Le speranze degli innovatori si stanno avverando nelle realizzazioni progressive sempre più avanzate della “Intelligenza Artificiale” e della “Robotica”.

Il problema della rappresentazione.

Il problema di rappresentare i pesi osservati in successione nel tempo s’avvia a risoluzione con la rappresentazione cartesiana che può fare uso di due assi uno per il tempo (di solito orizzontale), l’altro per il peso (di solito verticale).

Sappiamo che collegando fra loro i vari punti ottenuti nel piano della rappresentazione, si ottiene una curva che spetta al pediatra valutare.

In genere, in tutti i fenomeni, ha grande importanza la variabile tempo che scandisce i valori della grandezza da osservare o controllare.

Tra le esigenze più comuni c’è quella di rappresentare un valore corrispondente a un ben determinato istante. Man mano che il tempo varia in modo indipendente, varierà anche il valore della grandezza in un modo dipendente da questo tempo. È evidente che le variazioni possono essere anche imprevedibili. Tuttavia se da un istante precedente – rispetto all’attuale - si ha una certa variazione della grandezza dipendente, l’osservatore in genere arguisce che si avrà un’altra variazione analoga in un istante successivo purché “abbastanza vicino”.

Notiamo a questo punto che egli si basa sull’osservazione di **due** valori della grandezza variabile osservata: un valore “precedente” ed uno “attuale” (punto di vista storico); oppure su una previsione con due valori, ma uno è “attuale” ed un altro valore è “successivo all’attuale” (punto di vista predittivo).

I valori così considerati in coppia, possono essere uniti da un segmento che spesso si confonde con una tangente alla “curva” in esame (come la curva tempo-peso dell’esempio di cui sopra).

La curva è ottenuta collegando al meglio (*soggettivamente*) tutti i punti ricavati dall’osservazione del peso e del tempo corrispondente, istante per istante. In pratica spesso si considerano dei tratti di curva che si possono approssimare con dei segmenti rettilinei e allora la curva viene in realtà interpretata come una linea poligonale che può a sua volta evolvere verso una linea curvilinea relativamente “liscia” cioè continua, preferibilmente senza angoli bruschi.

Una maniera più accurata di interpretare la curva è quella di approssimarne un breve tratto con una tangente alla curva in un punto d’interesse determinato.

Tuttavia il coefficiente angolare m della retta supposta “tangente” è un numero che varia da punto a punto ed è definito dalla relazione $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) = (\Delta y) / (\Delta x)$ ovvero variazione di peso in rapporto (divisione) alla variazione corrispondente di tempo $(\Delta p) / (\Delta t)$. Si assume infatti che la tangente – eventualmente confrontata con una sua parallela secante ma vicina - sia la retta che meglio raffigura l’andamento della curva “nei pressi” del punto T , cioè “nell’intorno” di x_T che è “ascissa” del punto T della curva stessa. Il valore di m si dice “derivata” della (o dalla) funzione in esame.

Nota. Un intorno è definito come l’insieme dei valori che può assumere la variabile indipendente x , in un segmento abbastanza piccolo in relazione a scopi prefissati; l’intorno è compreso fra $x_T - \delta$ ed $x_T + \delta$ ove δ è un parametro opportunamente piccolo. Quando occorre, si può intendere senz’altro che $\delta = \Delta$ (cioè che l’intorno considerato non sia altro che quello relativo al calcolo della “derivata”).

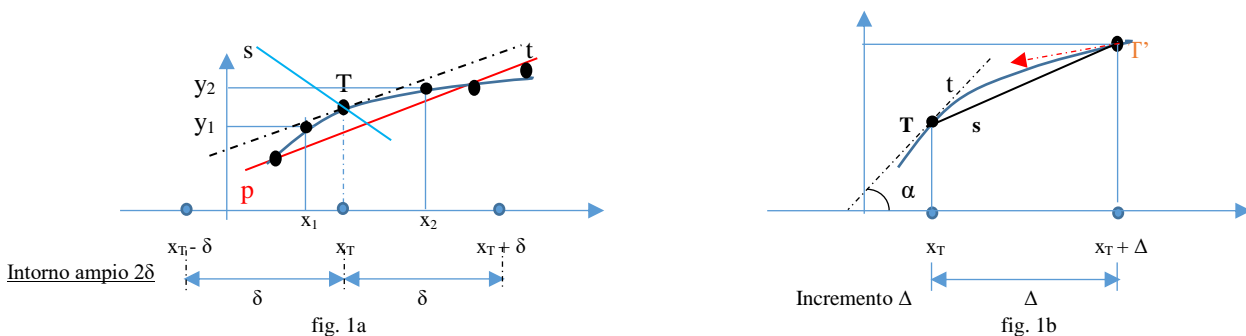


Fig. 1a. Tracciamento della tangente t (in tratteggio) ad una curva rappresentativa dell’andamento di una funzione (curva blu). Ci si può basare su una presunta parallela p che sembri approssimare l’andamento della curva nell’intorno di T , oppure ci si può basare su una secante s rotante intorno a un suo punto fisso T – che è quello di tangenza voluto. In tal caso l’intorno diventa un “incremento” Δ che aumenta x_T . “L’intorno di T ” scelto ha ampiezza 2δ (abbastanza ampia, per fini illustrativi), il suo valore centrale è x_T e ha estremi in $x_T - \delta$ e in $x_T + \delta$.

Fig. 1b. La secante s è scelta in modo d’incontrare la curva anche in un altro punto T' (fig. 1b) diverso da T . Si avvicina poi T' sempre più a T fino ad ottenere una presumibile tangente. Infatti immaginando che la secante s ruoti in senso antiorario intorno al punto fisso T essa incontra la curva in

un punto T' sempre più vicino a T (freccia) fino a diventare retta t tangente alla curva nel punto T stesso. Il coefficiente angolare m di questa tangente si dice **derivata** $y' = f'(x)$ della funzione $y = f(x)$ nel punto di ascissa x . La funzione $y = f(x)$ è rappresentata nel suo insieme dalla curva nel piano cartesiano $(x; y)$. Ricordiamo che la derivata $y' = m$ risulta anche uguale alla tangente trigonometrica tga dell'angolo α che la retta t forma con l'asse delle x sicché $y = m = \text{tga}$. Fra tutte le rette con uguale coefficiente angolare, una **passa per l'origine** e ha equazione $y = mx$ da cui $m = y/x = \text{tga}$ essendo y/x il rapporto fra i cateti di un triangolo rettangolo che ha un vertice nell'origine, base x e altezza y ; basta la proporzione $\text{tga}:1 = y:x$ per ricordare che il rapporto y/x è uguale alla tangente trigonometrica dell'angolo opposto al primo cateto y (a numeratore nella frazione del rapporto).

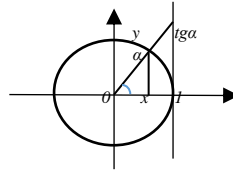


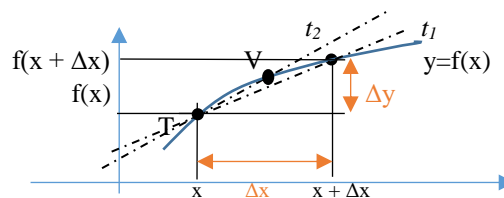
Fig. 2. Dai triangoli rettangoli si ricava la proporzione $\text{tga}:1 = y:x$

Funzione derivata con differenze finite.

Interpretiamo ora $(\Delta y)/(\Delta x)$ come rapporto tra differenze finite. Queste, a condizione che l'errore commesso sia "trascurabile", possono essere considerate allora abbastanza piccole da essere adoperate come ("virtualmente") infinitesime in relazione a scopi prefissati: i calcoli si ritengono sufficientemente accurati quando sono eseguiti più volte assumendo ogni volta un Δx sempre più piccolo (per es. la metà della volta precedente) finché il risultato si mantiene entro un "errore" ϵ assunto come accettabile. Pur consapevoli che il rapporto $(\Delta y)/(\Delta x)$ è "fra differenze finite" lo si assume valido come fra "infinitesimi" o "differenziali"; può essere indicato convenzionalmente con $(dy)/(dx)$ – o con dy/dx a parentesi sottintese e prende il nome di "derivata $y' = f'(x)$ della funzione $y = f(x)$ calcolata con differenze finite". (P. es., se y è il peso, x è il tempo t). Usando differenze finite, ricordare che si usa una derivata "a differenze finite" che può risultare utile per uso pratico, previe opportune cautele riguardanti l'errore massimo ammesso.

Il rapporto dy/dx introdotto da Leibniz è esprimibile anche nella forma usata da Newton che esplicita il ruolo della funzione $f(x)$; in questa, si considera il "limite del rapporto incrementale per $\Delta x \rightarrow 0$ " (leggi: "per delta x tendente a 0"):

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'$$



Qui a fianco abbiamo scritto la forma di Leibniz a 1° membro e la forma di Newton a 2° membro. Entrambe le forme esprimono y' .

Fig. 3. La variazione della variabile indipendente x in Δx corrisponde alla variazione $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$ della variabile dipendente y . La retta t ruotando dalla secante t_1 alla secante t_2 e così via - tende a diventare tangente in T man mano che il punto viaggiante V su t_2 s'avvicina al punto T .

La relazione $dy/dx = y'$ si può leggere dicendo: *la derivata di y rispetto ad x è indicata con il simbolo y' (y primo);* ciò per ricordare che la derivata proviene ("deriva") dalla funzione $y = f(x)$.

Interpretando liberamente l'espressione newtoniana, possiamo scrivere *con buona approssimazione* (usando piccoli spostamenti lungo l'asse x e supponendo la funzione $f(x)$ continua e derivabile (cioè senza sbalzi né angoli bruschi):

$$(2) \quad f(x+\Delta x) - f(x) = y' \Delta x \quad \text{e quindi}$$

$$(3) \quad f(x+\Delta x) = f(x) + y' \Delta x$$

L'ultima relazione ci dice che il valore di una funzione f (p. es. il peso) in un punto successivo $(x+\Delta x)$ si può prevedere (stimare) conoscendone il **valore attuale** $f(x)$ nel punto attuale di ascissa x (p. es. il tempo t), **l'andamento tangenziale** (la derivata $f' = y'$) e **il passo** desiderato (Δx): l'errore che si commette in questa valutazione è tanto minore quanto più piccolo è il passo (intervallo o incremento) Δx . Questa ultima considerazione sull'errore esprime l'avvertimento implicito nell'espressione "lim" per " $\Delta x \rightarrow 0$ ".

Nella pratica, tuttavia, a volte la funzione non è data per via algebrica ma può presentarsi con una raccolta di dati sparpagliati che devono essere interpolati se si vuole avere un grafico "continuo" come si vorrebbe per la raccolta dei dati peso-tempo. In questi casi il passo non può essere troppo piccolo poiché darebbe luogo a grossolane discontinuità dovute a inevitabili errori e vicissitudini casuali di misura. Sorge così il problema di definire quale sia la migliore interpolazione possibile che da una parte renda più "liscia" la curva che si vuole ottenere dai dati e dall'altra che non trascuri variazioni ritenute significative.

Non possiamo qui trattare questo problema: ci concentriamo invece sul caso in cui la curva sia già disponibile con caratteristiche di continuità insieme alle sue derivate.

Sapendo che la derivata prima ci può fornire la retta tangente alla curva in un qualsiasi suo punto, ricordiamo anche che questa retta corrisponde a un'equazione di "primo grado" del tipo $y=mx+n$ in cui m determina l'inclinazione della retta stessa: ad $m=0$ corrisponde una retta orizzontale, ad $m>0$ corrisponde una retta che forma un angolo α acuto col *semiasse positivo delle x*, mentre per $m<0$ questo stesso angolo è ottuso. Il parametro m è un indice di "quante volte y è più grande, uguale o più piccolo di x ".

Se l'angolo in questione fosse di 90° allora m va all'infinito e se ne perde il significato giacché non è più utilizzabile nei calcoli; bisogna allora passare alla retta in "forma esplicita rispetto ad x ", cioè a un'equazione del tipo $x = x_0$ che rappresenta la retta suddetta (perpendicolare all'asse x), passante per tutti i punti di ascissa x_0 . Analogamente, se l'angolo suddetto fosse nullo, la retta sarebbe perpendicolare all'asse y , ossia parallela all'asse x , e si avrebbe allora $y=y_0$.

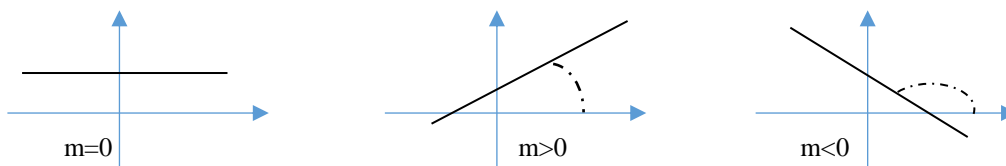


Fig. 4. Relazione fra il coefficiente angolare m di una retta e la posizione angolare di questa nel piano cartesiano (angolo col semiasse x positivo).

Il "termine noto" n invece determina la posizione della retta ($y=mx + n$) nel piano nel senso che:

- ad n **positivo** corrisponde una retta che passa al di sopra dell'origine O nel piano;
- ad $n = 0$ corrisponde una retta passante per l'origine O del piano cartesiano;
- ad una n **negativa** corrisponde una retta che passa al di sotto dell'origine O .

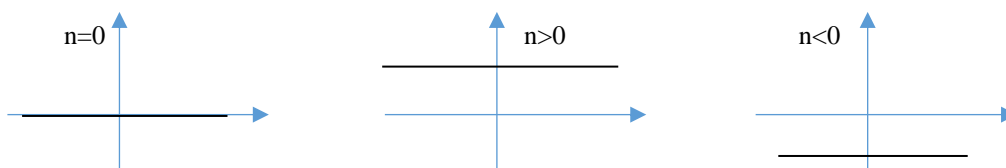


Fig. 5. Relazione fra il termine noto n di una retta (p. es. orizzontale) e la sua posizione nel piano cartesiano.

È evidente che l'andamento della curva rappresenta bene l'andamento della variabile y (peso del bimbo nell'esempio) in funzione della variabile x (tempo t , espresso p. es. in giorni). Tuttavia nella pratica, ci si riferisce di solito al valore più "attuale" (t_1) e magari a una "previsione" relativamente vicina relativa a un valore presunto t_2 , (p. es. un giorno del mese prossimo).

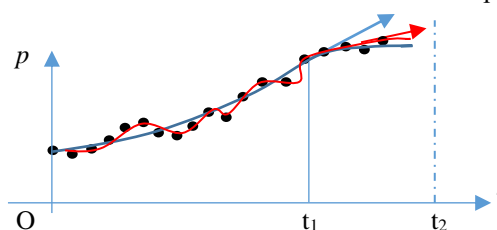


Fig. 6. Andamento possibile del peso di un neonato: i dati sono indicati dai pallini. Sono confrontati due diversi modi di "raccordare" i dati fra loro; in blu secondo una visione "ottimistica" che non tiene conto d'inevitabili piccole variazioni occasionali giornaliere e in rosso secondo una visione più pedissequa ma ritenuta più oggettiva e aderente alle misure. Sembra risultare più facile una previsione in chiave più raccordata (in blu); la scelta dipende da chi compie l'interpolazione, p. es. il pediatra. La sostituzione dei dati discontinui con una curva continua comporta un'operazione d'interpolazione necessariamente arbitraria. È il problema interpretativo dei dati. La freccia blu indica lo sviluppo atteso, estrapolato dai dati, magari in accordo (sperato) con l'andamento di tabelle medie di sviluppo. In base alle occasionali deviazioni osservate prima di t_1 , la situazione sembra suggerire una preoccupazione solo moderata... Si noti che la freccia blu segue l'andamento di una tangente alla curva in una zona di crescita relativamente ottimistica... Più aderente ai dati recenti è la previsione suggerita dalla linea e dalla freccia rosse. Tutto ciò dimostra che interpolare o estrapolare l'andamento di una funzione discontinua per valutare una derivata (tangente) è operazione rischiosa, non agevole e che richiede dei presupposti cautelativi non indifferenti da valutare, soprattutto per dati discontinui.

Di solito l'andamento di un fenomeno continuo è in generale curvilineo nel senso che tende ad allontanarsi più o meno sensibilmente da quello rettilineo man mano che ci si discosta dal valore attuale ma col mantenimento della tendenza. Accanto al valore attuale abbiamo finora considerato un valore relativamente vicino, prevedibile in base all'andamento della retta tangente e che può essere così chiamato "valore di prima approssimazione".

Se è richiesto un valore ancora più preciso o più lontano, è evidente che bisogna rinunciare all'andamento rettilineo e adottare un andamento curvilineo, approssimato da una curva adatta, per esempio parabolica o magari cubica.

Nel caso esaminato è naturale che il peso varia in relazione al tempo; è infatti previsto dai pediatri che il peso cambi nel senso di un aumento nel tempo, ma questa crescita sarà sempre minore in futuro, finché ovviamente si fermerà e si stabilizzerà con l'ingresso nell'età adulta.

Durante la crescita si può pensare ad una gibbosità della curva peso/tempo, sicché sembra giusto tentare l'adozione di un termine quadratico con coefficiente opportuno a:

$p_0 = p_0$ p_0 = peso iniziale, cioè all'inizio delle osservazioni, per esempio alla nascita o in altra data qualsiasi.

$p_1 = p_0 + mt$ m = aumento medio giornaliero: si ha infatti $m = (p_1 - p_0)/t$; tempo t in giorni; p_1 = peso presunto in t .

$p_2 = p_0 + mt + at^2$ p_2 = peso presunto più accurato, per un tempo t maggiore usando un coefficiente di variazione quadratica in forma polinomiale.

Avendo introdotto il termine quadratico t^2 con coefficiente a , conviene stabilirne il più chiaramente possibile il significato. Proviamo allora a calcolare le derivate prima e seconda della funzione peso p con supposizione quadratica. Per il calcolo delle derivate del polinomio, usiamo le regole di derivazione supposte note.

$$\text{Funzione di } p \text{ quadratica: } p = p_0 + mt + at^2 \quad (4)$$

$$\text{Derivata prima } p': p' = m + 2at \quad (5)$$

$$\text{Derivata seconda } p'': p'' = 2a \quad (6)$$

Dall'ultima relazione $p'' = 2a$ si ha: $a = p''/2$

Dunque il coefficiente a è legato alla derivata seconda p'' .

A questo punto conviene approfondire il senso generale della derivata seconda che comunque appare fungere o prestarsi alla costruzione di un possibile addendo correttivo.

Data una funzione supposta continua e derivabile $y = f(x)$, possiamo calcolarne la *derivata prima* $y' = f'(x)$, conformemente alla definizione:

$$(7) \quad y' = f'(x) = \frac{\text{microvariazione di } y}{\text{microvariazione di } x} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta} = \dots$$

e, analogamente possiamo calcolare la derivata di questa derivata, cioè la *derivata seconda* che è:

$$(8) \quad y'' = f''(x) = \frac{\text{microvariazione di } y'}{\text{microvariazione di } x} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta) - f'(x)}{\Delta}$$

A numeratore compaiono due derivate prime che devono essere espresse mediante la funzione $f(x)$ cui si riferiscono.

D'ora in poi il simbolo Δ indica Δx e la segnatura $\Delta \rightarrow 0$ sarà sottintesa.

Abbiamo così, passando da f'' a f' e poi a f :

$$(9) \quad y'' = f''(x) = \lim_{\Delta} \frac{f'(x+\Delta) - f'(x)}{\Delta} = \lim_{\Delta} \frac{[f'(x+\Delta+\Delta) - f'(x+\Delta)] - [f'(x+\Delta) - f'(x)]}{\Delta} =$$

$$(10) \quad = \frac{f(x+2\Delta) - 2f(x+\Delta) + f(x)}{\Delta^2} = y''$$

In alternativa si può giungere al medesimo risultato con una sostituzione di variabili. Nella (8) poniamo la nuova variabile z :

(9i) $z = x + \Delta$ così il primo termine a numeratore della frazione (8) diventa:

$$(10i) \quad f'(x + \Delta) = f'(z) = \lim_{\Delta} \frac{f(z+\Delta) - f(z)}{\Delta} = \lim_{\Delta} \frac{f(x+\Delta+\Delta) - f(x+\Delta)}{\Delta} = \lim_{\Delta} \frac{f(x+2\Delta) - f(x+\Delta)}{\Delta}$$

Riscriviamo ora la (8) per comodità del lettore:

$$(11i) \quad y'' = f''(x) = \lim_{\Delta} \frac{f'(x+\Delta) - f'(x)}{\Delta} = \text{e sostituendovi la 10i e la 7:}$$

$$(12i) \quad = \lim_{\Delta} \frac{\begin{matrix} (10i) & & (7) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [f(x+2\Delta) - f(x+\Delta)] - [f(x+\Delta) - f(x)] \end{matrix}}{\Delta} =$$

$$(13i) \quad = \lim_{\Delta} \frac{f(x+2\Delta) - 2f(x+\Delta) + f(x)}{\Delta^2} = y''$$

Nota. P. es. (9i) significa "riga 9 di questo inserto"

Nel numeratore della (12i) notiamo che la prima parentesi quadra è confrontata per sottrazione con la seconda parentesi quadra. Queste due parentesi quadre non corrispondono ad altro che ai cateti verticali dei due triangoli rettangoli visibili in fig. 7. Soltanto se sono uguali, l'espressione è nulla e – come si vede dalla figura – se è nulla, allora la curva è in realtà una retta (escludiamo il caso banale in cui i termini del numeratore della frazione siano tutti nulli).

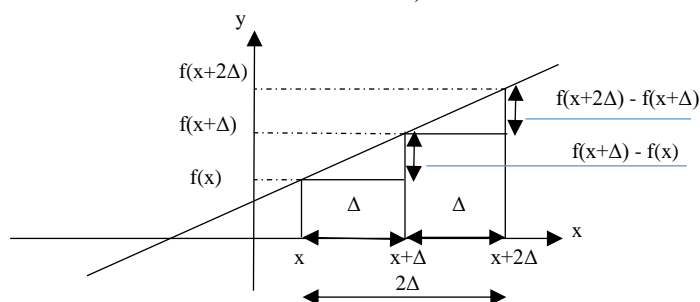


Fig.7. Come si vede chiaramente, se le ampiezze Δ e i salti della funzione (p. es. $f(x+\Delta)-f(x)$) sono in proporzione come indicato dalle doppie frecce, la curva è in realtà una retta.

Se, al contrario, nella (9) la differenza fra le due parentesi quadre non è nulla, a parità di Δ , allora si ha una curva; rimane naturalmente da stabilire di che tipo questa possa essere.

Per vederlo, cominciamo ad osservare che il numeratore dell'ultima espressione trovata si annulla quando:

$$(11) \quad f(x+2\Delta x) + f(x) = 2f(x+\Delta x) \quad \text{cioè quando:}$$

$$(12) \quad f(x+\Delta x) = \frac{[f(x+2\Delta x) + f(x)]}{2}$$

E ciò significa che il valore centrale, in $x+\Delta x$, è proprio uguale alla media dei valori agli estremi (in x e in $x+2\Delta x$). Questo risultato ci dice che la derivata seconda ha il pregio di valutare la "curvatura" che la funzione assume in un punto determinato intermedio $x + \Delta x$. Infatti nel segmento di ampiezza complessiva 2Δ , si confronta il valore centrale $f(x + \Delta)$ della funzione con la media dei due valori che la funzione stessa ha agli estremi del segmento stesso (cioè in x e $x+2\Delta x$). In questi estremi la funzione f ha rispettivamente i valori $f(x+2\Delta x)$ e $f(x)$. Riassumendo, per una parabola $y = ax^2 + bx + c$:

$$(13) \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$(14) \quad f(x+\Delta) = a(x + \Delta)^2 + b(x + \Delta) + c$$

$$(15) \quad f(x+2\Delta) = a(x + 2\Delta)^2 + b(x + 2\Delta) + c$$

Per il calcolo della derivata seconda sfruttiamo la formula già trovata in (10):

$$y'' = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x+2\Delta) - 2f(x+\Delta) + f(x)}{\Delta^2} \quad \text{Sostituendo (13) (14) e (15) nel numeratore si ha:}$$

$$(16) \quad \{[a(x + 2\Delta)^2 + b(x + 2\Delta) + c] - 2[a(x + \Delta)^2 + b(x + \Delta) + c] + [ax^2 + bx + c]\} / \Delta^2 = \text{sviluppando e semplificando:}$$

$$(17) \quad = (4a\Delta^2 - 2a\Delta^2) / \Delta^2 = 2a\Delta^2 / \Delta^2 = 2a$$

Come si vede, il risultato $2a$ (ottenuto con la formula delle derivate calcolate con le differenze "finite") è identico a quello ottenuto derivando "normalmente" due volte il polinomio dell'equazione parabolica $y = ax^2 + bx + c$ (esplicita rispetto a y). Infatti derivando secondo le regole di derivazione: $y' = 2ax + b$ e $y'' = 2a$.

Il primo coefficiente dell'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ è "a". Sappiamo che $2a$ è la sua derivata seconda; ($y'' = 2a$). Il parametro "a" è positivo o negativo a seconda che la curvatura parabolica abbia la concavità rivolta verso l'alto (concordemente al semiasse positivo delle y) o rispettivamente verso il basso. Il parametro "a" è nullo quando la parabola degenera in una retta o è semplicemente tale, cioè se l'equazione diventa di primo grado e così si riconduce a quella di una retta.

Questo legame con la concavità si vede facilmente in una parabola con l'equazione particolarmente semplice $y = ax^2$. Infatti il risultato non risente del segno della x giacché il suo quadrato è sempre positivo: di conseguenza la positività o la negatività di y può dipendere soltanto dal segno del coefficiente a .

Se a è positivo, tutti i valori di y saranno positivi e la parabola si dispone tutta al di sopra dell'asse x (toccandolo solo nell'origine); se è negativo, tutti i valori saranno negativi e questa parabola $y = ax^2$ si dispone tutta al di sotto dell'asse x (toccandolo solo nell'origine).

Funzioni pari e funzioni dispari.

Basta un attimo di riflessione per comprendere anche che questa parabola ($y=ax^2$) è una funzione “pari” nel senso che essa si dispone simmetricamente rispetto all’asse y e cioè le appartengono tutte le coppie di punti $(x; y)$ e $(-x; y)$ in maniera speculare rispetto all’asse verticale: infatti il risultato y è sempre uguale, sia per $y=a(x)^2$, sia per $y=a(-x)^2$.

Naturalmente è pari anche l’equazione $y = -ax^2$ giacché il segno negativo è esterno al binomio e pertanto interviene una sola volta; al contrario, la x elevata al quadrato, “assorbe” il segno rendendolo comunque positivo moltiplicandolo due volte per sé stesso ($- \times - = +$). Il segno influisce solo sulla posizione di x nel piano cartesiano (a destra o a sinistra dell’asse y), non sul suo quadrato che fornisce y .

Bene è ricordare che si dicono “dispari” le funzioni simmetriche rispetto non all’asse y bensì simmetriche rispetto all’origine degli assi. Un chiaro esempio è dato da qualsiasi retta passante per l’origine, cioè del tipo $y = mx$; così pure un altro esempio è dato dalla “cubica” $y=ax^3$. Questa ultima ha un flesso nell’origine ed il suo andamento è appunto simmetrico rispetto a questo punto. Ciò dipende dal fatto che il segno della x permane elevandola al cubo.

Più in generale, qualsiasi funzione con esponente pari, cioè del tipo $y=x^{2n}$ (con n intero) è simmetrica rispetto all’asse y , mentre qualsiasi funzione del tipo $y=x^{2n+1}$ cioè con esponente dispari, è simmetrica rispetto all’origine.

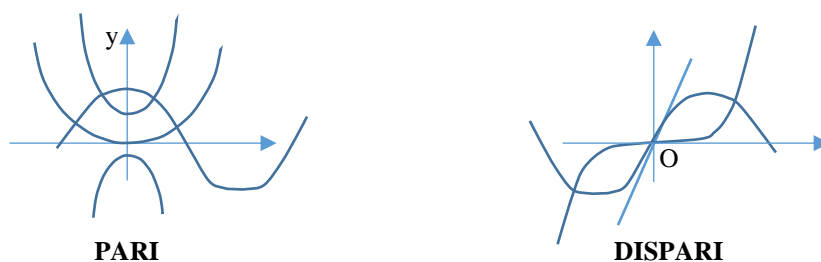


Fig. 8. A sinistra, esempi di funzioni “pari”: parabole e $\cos x$. A destra, funzioni “dispari”: retta, cubica e $\sin x$. Si vedono le pari, a sinistra, che sono simmetriche rispetto all’asse y . Le dispari, a destra, rispetto all’origine O .

Ne consegue che una somma di funzioni, alcune di tipo pari e altre di tipo dispari, cioè somme di potenze ad esponenti interi x^k , (persino se la somma è “pesata” con opportuni coefficienti a_k calcolati appositamente per ciascun termine), si possono prestare a descrivere una funzione continua nel piano cartesiano; si ha cioè un polinomio del tipo:

$$(18) \quad y = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_n x^n$$

L’andamento della funzione sarà più o meno di tipo “pari” oppure “dispari” a seconda dei pesi accordati alle potenze pari oppure dispari.

I rischi che si corrono con una “serie di potenze pesate” in questo modo, possono essere diversi. Ci si può domandare:

1. In quali condizioni sia o no calcolabile il polinomio più adatto a rappresentare una funzione determinata.
2. Quale sia il numero di termini necessario per un’ approssimazione necessaria e sufficiente a scopo pratico.
3. Se e quando abbia senso considerare un polinomio formato da un numero illimitato di termini.
4. Se la forma di polinomio sia unica nei limiti di un’ approssimazione prestabilita in che modo accettabile.

Alle prime domande risponde la trattazione relativa alla serie di Taylor. La risposta alla quarta domanda è no poiché l’ approssimazione ad una curva data – entro “scostamenti o errori” permessi - può essere realizzata in vari modi, non solo con polinomi diversi nei parametri moltiplicativi o esponenziali ma persino da funzioni non polinomiali.

L’ utilità di questo approccio è evidente se si considera che esistono molte funzioni di cui non si ha possibilità di calcolare i valori, non essendo essi esprimibili con operazioni aritmetiche fondamentali; in queste condizioni si trovano le cosiddette funzioni trascendenti come p. es. $\sin x$, $\log x$, e^x , e così via.

A proposito di funzioni pari e dispari, si constata facilmente che la funzione $\cos x$ è pari mentre la funzione $\sin x$ è dispari. $9p0$ passa alla “serie di Fourier”, risorsa preziosa per lo studio di fenomeni periodici e vibrazioni di qualunque genere in ingegneria, medicina, robotica, geologia, biologia, musica, fisica, architettura e così via.

Derivata seconda in generale. Prima di continuare, è bene esaminarne alcuni aspetti relativi al suo significato.

Abbiamo visto che effettivamente essa è nulla per una retta; il valore al centro di un suo segmento è uguale alla semisomma dei valori agli estremi del segmento stesso; inoltre la derivata seconda ci dà notizia dell’ eventuale esistenza di almeno un contributo dovuto ad una curvatura di tipo “pari” ovverosia del tipo che (per il termine in x^2) abbiamo detto “parabolico” e, in più, ci dà notizia pure sull’ orientamento della curvatura (cioè se concordemente o contrariamente al verso positivo delle y , vale a dire c’ illumina sul verso della concavità).

Da tutto ciò che la derivata seconda può esprimere, si evince per analogia che vale la pena indagare anche sui possibili significati delle derivate successive. Già abbiamo visto che la derivata seconda rende conto di una curvatura per così dire parabolica e pertanto può esprimere qualcosa di più (rispetto alla derivata prima) sul tipo di curvatura di una qualunque funzione $y = f(x)$.

In più osserviamo anche che tale curvatura - valutata nel modo sopra visto - tende ad apparire “costante” per una parabola, essendo costante la differenza (in rosso in fig. 9) tra il valore della funzione in un punto $x + \Delta$ e il valore medio dei due valori agli estremi dell'intervallo attorno ad esso.

Questa proprietà è però esclusiva della parabola; qualsiasi altra curva, pur continua, può naturalmente assumere configurazioni varie e complesse. S'intuisce facilmente che esse comportano il contributo di altre derivate, diverse e di ordine superiore, naturalmente, rispetto a quella tipica della parabola.

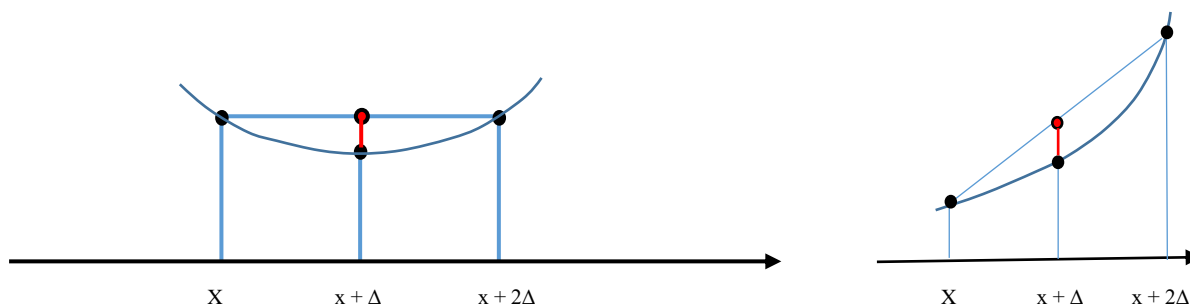


Fig. 9. In una parabola vige una “legge microscopica” secondo cui risulta costante la differenza (in rosso in figura) tra il valore della funzione in un punto $x + \Delta$ e la media dei due valori agli estremi x e $x + 2\Delta$ dell'intervallo “infinitesimo” (o “finito” - secondo la (17) - riletta con un Δ “finito”, non necessariamente infinitesimo).

Questo modo di valutare una curvatura non pare affatto dello stesso tipo di quello valido per una circonferenza in cui invece la curvatura dipende dal raggio costante che ruota intorno ad un punto fisso detto centro. Nella circonferenza si tratta di una “legge macroscopica” per così dire giacché coinvolge dichiaratamente grandezze finite, non infinitesime. La circonferenza è un luogo geometrico nel senso che tutti i suoi punti “obbediscono” ovvero “verificano”, “soddisfano” una stessa legge – il termine “legge” richiama l'idea che essa è “uguale per tutti” i punti della circonferenza indistintamente. La legge è: “La circonferenza è il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso detto centro”.

Naturalmente esistono altre possibili leggi: ad es. “l'ellisse è il luogo dei punti in cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti “fuochi”. Cambiando la legge del luogo geometrico si ottengono figure e corrispondenti equazioni diverse.

Pure per la parabola vige una “legge”: secondo questa legge, “la parabola è il luogo geometrico in cui ogni punto è equidistante da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice”.

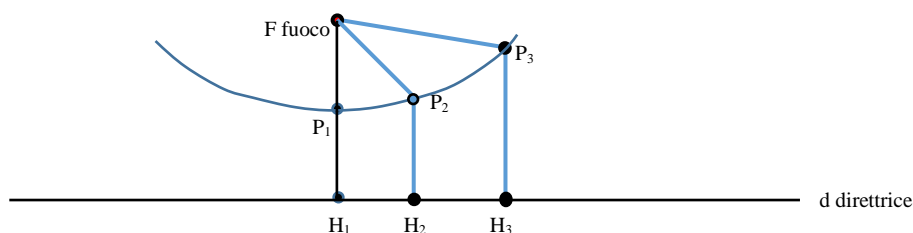


Fig. 10. La legge “macroscopica” della parabola a cui tutti i suoi punti P obbediscono è: “la parabola è il luogo dei punti ciascuno dei quali è equidistante da un punto fisso detto fuoco F e da una retta fissa d , detta direttrice”. Per ogni P risulta: $P_k F = P_k H_k$

La derivata terza.

Il fatto che la derivata seconda sia costante per la parabola, è di fatto una legge “microscopica” giacché coinvolge grandezze infinitesime: non vi si parla di fuoco né di direttrice.

Ricordiamo che la derivata prima è definita e calcolata coinvolgendo due punti di ascissa rispettivamente x e $x + \Delta x$.

Si osservi che la derivata seconda $y'' = 2a$, vale per la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$. Essa rivela una struttura interessante di questa curva, struttura che coinvolge tre punti (anziché due come per la derivata prima che coinvolgeva due soli punti; e infatti per due punti di una curva passa una retta che può esserle tangente – i due punti a distanza infinitesima l'uno dall'altro). Per tre punti passa una parabola del tipo $y = ax^2 + bx + c$ che ha tre coefficienti (ogni punto vale un coefficiente). Un cerchio osculatore a una curva ha bisogno di tre punti a distanza infinitesima l'un dall'altro e dunque per ricavare questo cerchio occorre una derivata seconda... (in generale occorrono tre punti distinti per determinare e poter così tracciare un cerchio).

Ci si può allora domandare se per caso la derivata terza coinvolga quattro punti anziché soltanto tre.

Reiterando il procedimento già visto per il calcolo della derivata seconda, per una funzione qualsiasi $f(x)$ si ha che:

$$(19) \quad f''(x) = \frac{[f(x+2\Delta) - 2f(x+\Delta) + f(x)]}{\Delta^2}$$

Come si vede, la derivata seconda necessita di tre ascisse differenti, $x, x+\Delta, x+2\Delta$ cioè di tre punti diversi. Aggiungo un incremento Δ alla x in $f''(x)$ e ottengo così:

$$(20) \quad f''(x + \Delta) = \frac{[f(x+3\Delta) - 2f(x+2\Delta) + f(x+\Delta)]}{\Delta^2}$$

Passando allora alla derivata terza:

$$(21) \quad f'''(x) = \frac{[f''(x+\Delta) - f''(x)]}{\Delta} =$$

sostituendo la (20) e la (19) nella (21):

$$(22) \quad f'''(x) = \frac{\frac{[f(x+3\Delta) - 2f(x+2\Delta) + f(x+\Delta)] - [f(x+2\Delta) - 2f(x+\Delta) + f(x)]}{\Delta^2}}{\Delta} =$$

$$(23) \quad f'''(x) = \frac{[f(x+3\Delta) - 3f(x+2\Delta) + 3f(x+\Delta) - f(x)]}{\Delta^3}$$

Queste formule per derivate n-esime possono essere usate nel calcolo numerico (approssimato “quanto si vuole”) con i computer.

I quattro punti (necessari alla derivata terza) possono ora servire per valutare se la curva $y=f(x)$ in esame abbia qualche zona di “flesso” cioè un’ondulazione, anziché una semplice gobba come era per la parabola.

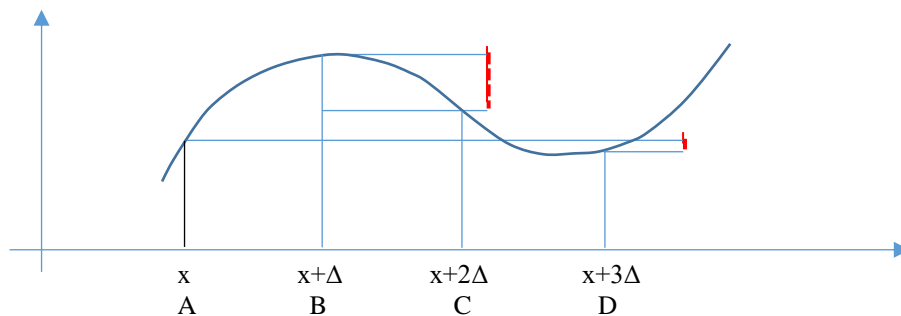


Fig. 10. Confronto dei dati relativi ad un flesso: il numeratore della f''' si annulla per $f(x+3\Delta) - f(x) = 3 [f(x+2\Delta) - f(x+\Delta)]$ ovvero per $[f(x+3\Delta) - f(x)] / 3 = f(x+2\Delta) - f(x+\Delta)$ ma non è il caso della figura. In generale, $1/3$ della differenza fra i valori estremi $f(x+3\Delta) - f(x)$ è confrontato con la differenza fra i valori intermedi: $f(x+2\Delta) - f(x+\Delta)$. Il 3 appare in relazione all'intervallo $AD=3BC$.

Nel grafico si nota bene che la differenza (in rosso) fra il primo valore (in A) e l'ultimo (in D) è confrontata con la tripla differenza (in rosso) fra il secondo (in B) e il terzo (in C).

Si può notare pure che l'intervallo AD è (o tende ad essere negli infinitesimi) tre volte più largo dell'intervallo BC soltanto se il flesso è orizzontale. Quando il flesso è obliquo la succitata differenza non è nulla e la derivata terza segnala l'andamento crescente o decrescente del flesso nell'intorno del punto di flesso vero e proprio. In questo modo viene valutata e caratterizzata la possibile ondulazione di un flesso ad S.

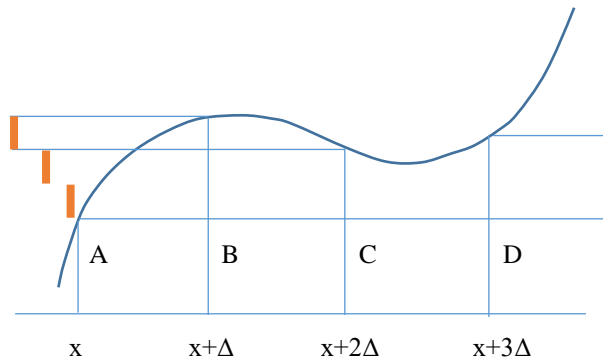


Fig. 11. In quest'altra figura la differenza $f(D) - 3[f(C) - f(B)] - f(A) > 0$.

La derivata terza caratterizza tutta la curva assumendo valori diversi oppure non diversi, da punto a punto, in ciascuno dei quali può indicare caratteristiche particolari apparentemente differenti.

Ad esempio l'equazione della cubica $y = ax^3$ ha come grafico un solo flesso e tuttavia la derivata terza rimane costante per qualsiasi x . Risulta infatti:

$$\begin{aligned} y &= ax^3 \\ y' &= 3ax^2 \\ y'' &= 6ax \\ y''' &= 6a \end{aligned}$$

Questa curva ha la derivata terza costante ma il flesso non si verifica in tutto l'asse reale delle x bensì in un solo punto: l'origine $O(0;0)$. Il fatto che la derivata terza rimanga costante ($6a$, con "a" coefficiente del termine ax^3) indica una proprietà della cubica che appare riferirsi a una sua propria "legge microscopica".

Come abbiamo già accennato, si può proseguire con il calcolo della derivata di qualsiasi ordine con "differenze finite", calcolo utile ai fini della programmazione numerica con le macchine (la programmazione numerica attiene al calcolo con quantità finite ed espresse sempre con un numero finito di decimali).

Tartaglia e il suo triangolo.

A questo scopo, il calcolo dei coefficienti che compaiono nei numeratori delle derivate descritte con differenze finite, può essere facilitato osservando le analogie con i coefficienti dello sviluppo di un binomio e con i coefficienti del triangolo di Tartaglia che è piuttosto comodo al riguardo. Senza memorizzarlo, basta ricordare che ha la forma di un triangolo p. es. isoscele formato da tante righe sovrapposte.

Nella prima riga, che fa da vertice, "in alto", c'è solo il numero 1.

A ogni riga sottostante bisogna aggiungere ciò che c'è ai fianchi della riga soprastante; se a fianco del numero 1 non c'è alcunché, allora si deve aggiungere 0. Il risultato è $1+0=1$ (a destra) oppure $0+1=1$ (a sinistra). Questi due risultati vanno segnati nella seconda riga dove ora abbiamo 1 e 1. Applicando di nuovo la regola, ai fianchi non c'è alcunché e pertanto sommiamo lo 0 ottenendo ancora degli 1 mentre al centro abbiamo la coppia 1 1 che sommata dà $1+1=2$.

La seconda riga è dunque 1 2 1. Così procedendo per somme successive e riga per riga, si troverà la terza riga 1 3 3 1, ..., poi la quinta 1 4 6 4 1 e via così.

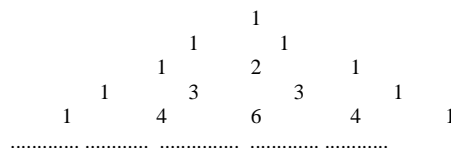


Fig. 12. Le prime cinque righe del **Triangolo di Tartaglia**. Ciascuna riga si può riferire al calcolo con differenze finite di una derivata convenendo che l'uno in alto (riga "0") rappresenti la funzione di partenza $f(x)$, la prima riga sottostante il numeratore della derivata prima $f' = f(x + \Delta) - f(x)$, la seconda riga il numeratore della derivata seconda, cioè $f'' = f(x + 2\Delta) - 2f(x + \Delta) + f(x)$ e così via, ricordando che - nel caso delle derivate - i coefficienti vanno presi con segno alternato partendo dal +1 a sinistra (p. es. 1 -2 1, 1 -3 3 -1, ...).

Le altre derivate.

Si può ora notare che la nozione di derivata ha interesse non solo ai fini del tracciamento di una tangente ad una curva (e cioè ai fini dell'approssimazione di una funzione qualsiasi mediante l'andamento lineare di una retta tangente), ma anche per definire qualche caratteristica saliente di un luogo geometrico, indipendentemente da elementi geometrici classici "macroscopici o visibili" come punti (centro, fuochi...), distanze (di raggi, segmenti) o aree (come accadde per la velocità areolare dei pianeti) bensì usando sistematicamente elementi "microscopici o infinitesimi, invisibili" del riferimento cartesiano in x e y pur indicandoli - per uso pratico - come se fossero quantità finite (in attesa di tendere a zero, cioè "tendenti a zero").

A questo scopo didatticamente introduttivo abbiamo mostrato che la derivata è uno strumento potente d'indagine e di descrizione di una funzione giacché è in grado di indicarne l'andamento (la tangente) sia pure in un "piccolo" tratto. Volendo classificare le funzioni in ordine di complessità crescente, al primo posto per semplicità, poniamo la costante, rappresentata da una retta parallela all'asse x con equazione tipica $y = \text{cost}$ ovvero $y = a_0$.

Al secondo posto possiamo porre la funzione di primo grado; è una retta nel riferimento cartesiano: $y = a_0 + a_1 x^1$.

Così proseguendo, possiamo aggiungere la variabile x elevata alla seconda e otteniamo: $y = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2$.

Con quest'ultima equazione si ha un polinomio di secondo grado che rappresenta una parabola. Sappiamo dall'algebra che un'equazione di grado n - come polinomio uguagliato a zero - ha n soluzioni (reali o complesse). Pertanto la parabola che è di secondo grado fornisce due soluzioni quando è posta in un sistema con una relazione di primo grado (rappresentante una retta).

Tuttavia si nota che non sempre una retta incontra la parabola: ma l'invenzione dei numeri complessi - dotati di parte reale e di parte immaginaria - ha posto un rimedio alla suddetta eccezione poiché così risulta sempre risolvibile il sistema delle due equazioni (corrispondenti a una retta e a una parabola). Le soluzioni possono quindi essere reali e distinte (retta secante la parabola) oppure reali e coincidenti (retta tangente alla parabola) oppure complesse coniugate (retta esterna alla parabola).

L'invenzione dei numeri complessi potrebbe sembrare cervellotica se non si ricordasse che essi sono **usati** nel calcolo dei circuiti elettrici ed elettronici e in altre occasioni ove siano in gioco vettori od elementi rotanti o ripetitivi (vibrazioni ottiche, acustiche e meccaniche, motori, ingranaggi, ...).

In generale un polinomio di grado n - posto a sistema con l'equazione di una retta - possiede n soluzioni. Questo significa che è rappresentato da una curva che una retta incontra al massimo in n punti reali.

A questo riguardo, vale la pena osservare che una funzione trascendente come la $y = \sin x$ - posta a sistema con una retta orizzontale $y = n$ con $-1 < n < +1$, ha infinite intersezioni e quindi infinite soluzioni. Il grado sarebbe infinito.

L'impresa di approssimare una sinusoidale con una curva polinomiale appare dunque impossibile; si osservi tuttavia che la funzione sinusoidale $y = \sin x$ è periodica e dunque basta possedere la conoscenza dei valori assunti in un periodo - o addirittura in un quarto di periodo, data la particolare conformazione simmetrica della curva - per ottenere i valori della medesima per qualsiasi punto dell'asse reale x.

Un caso di parabola approssimante la sinusoidale $y = \sin x$.

Torniamo allora di nuovo a un polinomio usuale scrivendolo a cominciare dai suoi elementi più semplici cioè dai termini di grado più basso. Con questo polinomio cercheremo di approssimare una curva $y = f(x)$. Iniziamo quindi con:

$$y = a_0$$

In questo caso il grafico del polinomio è estremamente semplice e si riduce a una retta parallela all'asse x e passante per il punto di coordinate (0; a_0). Così proseguendo, aggiungiamo il termine di primo grado:

$y = a_0 + a_1 x$. Qui abbiamo l'equazione di primo grado di una retta con coefficiente angolare a_1 e termine noto a_0 . Essa ci permette di approssimare l'andamento della curva nel tratto in cui sembra accompagnare quello della retta che risulta così tangente ad essa in un punto determinato.

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Questa è l'equazione di secondo grado di una parabola ad asse verticale (ovverosia parallelo all'asse y). Essa introduce un termine quadratico con coefficiente a_2 capace di approssimare non solo la retta tangente a una curva ma anche di accompagnarne la curvatura per un tratto ritenuto d'interesse.

Ed eccone un esempio applicando questi concetti alla funzione $\sin x$.

Sappiamo che il limite per $x \rightarrow 0$ di $(\sin x) / x = 1$ e cioè che per piccoli angoli x, l'andamento di $\sin x$ si confonde con x (è ben approssimato da x), pertanto al posto di $y = \sin x$ si può sfruttare la retta $y = x$. Ciò risulta anche dal fatto che la derivata di $\sin x$ è $\cos x$ e per $x = 0$ si ha $\cos 0 = 1$ che è il coefficiente angolare m della tangente alla funzione $\sin x$ nel punto di ascissa $x = 0$. Esso vale 1, vale a dire $m = 1$. Pertanto la tangente per l'origine è certamente $y = 1x$, ovverosia $y = x$.

Questa circostanza risulta anche dallo studio del lim $(\sin x)/x = 1$ per $x \rightarrow 0$. Ciò equivale a dire che nelle vicinanze dell'angolo nullo $x = 0$, la funzione $y = \sin x$ si confonde con $y = x$. Infatti la retta $y = x$ è tangente alla $y = \sin x$ in $O(0; 0)$.

Entro i limiti di un'approssimazione prestabilita accettata, si può dunque scrivere $\sin x \cong x$.

Si ha così che nell'origine $\sin 0 = 0$. Per l'angolo di 30° che corrisponde a $\pi/6$ si ha $\sin \pi/6 = 1/2 = 0,5$. Risulta $x = \pi/6 = 0,523...$ L'errore è $0,523 - 0,5 = 0,023$ di poco superiore al 2%. L'errore può essere accettabile in una valutazione di prima mano, mentre potrebbe essere inaccettabile in relazione a diverse esigenze.

Supponendo di volere un'approssimazione migliore per l'angolo di 30° , si può pensare di sfruttare l'equazione di una parabola per imprimere alla tangente un andamento curvilineo più adatto alle aspettative.

L'equazione di una parabola è: $y = ax^2 + bx + c$.

Volendo inoltre che la curva passi per l'origine, il termine noto c deve essere nullo, cioè $c = 0$.

Imponiamo pure che l'andamento della retta tangente nell'origine, $y = mx$, abbia $m = 1$ (come già visto sopra): per questo scopo usiamo la derivata prima: $y' = 2ax + b = 1$, cioè $y' = 1$ per $x = 0$, vale a dire $b = 1$.

Infine imponiamo il passaggio della curva per il punto $(\pi/6, 1/2)$ giacché è $\sin \pi/6 = 1/2$. Sostituiamo i valori suddetti in x.

Si ha allora: $\frac{1}{2} = a (\pi/6)^2 + 1(\pi/6) + 0$
 cioè: $\frac{1}{2} = a(\pi/6)^2 + 1(\pi/6)$
 e quindi $a = 6(3 - \pi) / \pi^2$.

La parabola cercata è dunque: $y = [6(3 - \pi) / \pi^2] x^2 + x$

Valutiamo la precisione della curva nei punti per gli angoli $0=0^\circ$, $15^\circ = \pi/12$, $30^\circ = \pi/6$, $45^\circ = \pi/4$.

Per x =	0°	15°	30°	45°
radianti	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$
sinx	0	0,2334	1/2	0,649
y	0	0,2588	1/2	0,782

Come si vede, i valori sono esatti per $x=0$ e per $x=30^\circ$, mentre per 15° c'è un errore poco più di due centesimi (0,25... - 0,23... = 0,02) e per 45° un errore di un decimo abbondante. In ogni caso, nell'arco fra 0° e 30° l'approssimazione appare relativamente buona.

Una “serie” per una curva ovvero un polinomio approssimante.

In realtà la funzione $\sin x$ è sinuosa, addirittura in modo periodico. Pertanto, notando che i valori si ripetono uguali ogni 90° e sono facilmente ottenibili mediante un facile conteggio (p. es. $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ \dots$) si può cercare una funzione che si adatti meglio nel tratto fra 0° e 90° .

Osservando che la curva $y = \sin x$ è sinuosa ed ha p. es. un flesso nell'origine ($x=y=0$), si può pensare di usare un polinomio di terzo grado sapendo che le cubiche hanno un flesso e che questo può essere posto in O come accade per la $y=\sin x$.

Per rendere il calcolo più generale e sistematico, anche a vantaggio pratico, poniamo la funzione $\sin x$ a confronto con un polinomio di grado imprecisato, cominciando a scriverlo dal termine noto e aumentando il grado man mano ad ogni termine aggiunto. Questa idea può essere applicata anche più in generale ad una funzione qualsiasi purché “liscia” cioè continua e con derivate continue: questa precauzione ci assicura che la legge “microscopica” del luogo possa essere ritenuta valida per tutta la curva, proprio perché la legge è “continua”. Supponiamo così che, a partire da un punto $x=x_0$ si possa scrivere :

$$f(x) = a_0x^0 + a_1(x-x_0)^1 + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \dots + a_n x(x-x_0)^n \text{ e cioè:}$$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots \quad \text{allora derivando:}$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + \dots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \dots \quad \text{derivando ancora di seguito...:}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \times 3a_3(x-x_0) + 3 \times 4a_4(x-x_0)^2 + \dots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \dots \quad \text{usando il fattoriale } 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$f'''(x) = 3! a_3 + 4! a_4(x-x_0) + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3} + \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \dots + n! a_n$$

Si usa “n fattoriale” definito con $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1$ (si assume $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 \times 1 = 2, 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6\dots$).

Sostituendo $x=x_0$ nelle relazioni precedenti, tutte le parentesi $(x-x_0)$ sono nulle e si ottiene così:

$$\begin{matrix} f(x_0) = a_0 & f'(x_0) = a_1 & f''(x_0) = 2a_2 & f'''(x_0) = 3!a_3 & \dots & f^{(n)}(x_0) = n!a_n & \text{ricavo } a_k: \\ a_0 = f(x_0) & a_1 = f'(x_0) & a_2 = f''(x_0)/2 & a_3 = f'''(x_0)/3 & \dots & a_n = f^{(n)}(x_0)/n! & \text{sicché:} \end{matrix}$$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2/2! + f'''(x_0)(x-x_0)^3/3! + \dots + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n/n! + \dots$ e infine:
 usando “sigma maiuscolo” come “sommatoria per k intero che va da 0 a infinito” degli addendi $f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k / k!$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x_0) (x-x_0)^k / k!$$

ove si legge che la funzione $f(x)$ è esprimibile con una “serie” (sequenza) di termini (addendi) che tendono a dare contributi sempre più piccoli (grazie alla divisione per k! Il fattoriale cresce molto rapidamente). Questa circostanza offre “abbastanza rapidamente” una precisione di calcolo per il risultato voluto; infatti non è pensabile di sommare infiniti termini come teoricamente indicato dalla sommatoria, tuttavia l'errore che si commette trascurando i termini per $k > p$ (con p intero prestabilito) diventa accettabile con un p “non troppo grande” e comunque “limitato, non infinito”!
 La serie si presenta comunque come una somma polinomiale ed è detta “serie di Taylor”.

Un caso particolare si ha se $x_0 = 0$. Se ciò si verifica, la serie è ugualmente valida ma prende il nome di “serie di McLaurin”.

Applicando questo risultato alla funzione $\sin x$ abbiamo: $\sin x = x - x^3/6 + x^5/120 - x^7/5040$ (serie di T troncata dall’ottavo termine in poi). Al lettore le interessanti verifiche del caso.

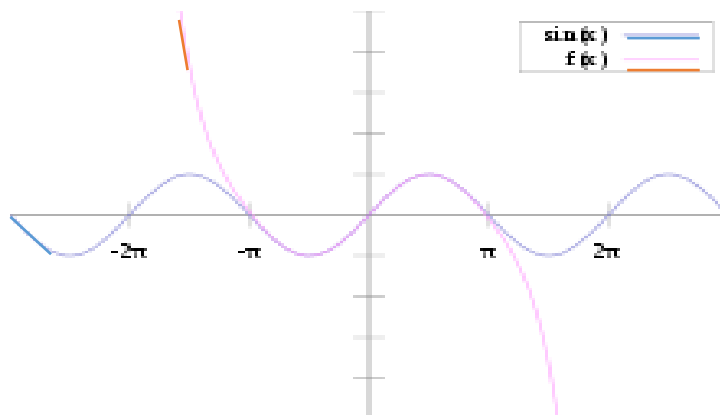


Fig. 13. Una serie di Taylor troncata dopo il settimo addendo approssima molto bene la funzione $y=\sin x$. La funzione $y=\sin x$, in blu, essendo periodica e ripetitiva dei valori tra 0 e $\pi/2$, è rappresentata e approssimata piuttosto bene dal polinomio suddetto di settimo grado $f(x)$, in rosso, come si vede dal grafico.

Bibliositografia a computer.

<https://it.alegsonline.com/art/96606> → (per la nota storica e filosofica)

https://it.wikipedia.org/wiki/Serie_di_Taylor → (per la trattazione matematica)

Indice

Avvertenza.

Nota storica.

Il problema della rappresentazione.

Funzione. Derivata con differenze finite.

Derivata prima e derivata seconda.

Funzioni pari e funzioni dispari.

Derivata seconda in generale.

La derivata terza.

Tartaglia. Il suo “triangolo”.

Le altre derivate.

Un caso di parabola approssimante la sinusoidale $y=\sin x$.

Una “serie” per una curva ovvero un polinomio approssimante.